

Radiación del Cuerpo Negro

Pedro Velarde

Departamento de Ingeniería Energética
Instituto de Fusión Nuclear
Universidad Politécnica de Madrid

1 de febrero de 2019



Radiación del cuerpo negro

- ▶ Hablamos de un cuerpo negro cuando nos centramos en la emisión de radiación de un cuerpo en equilibrio termodinámico.
- ▶ En general un cuerpo a baja temperatura emite la mayor parte de la radiación a longitudes de onda por debajo del infrarrojo, y por encima de unos 500 °C parte apreciable de la radiación es emitida en el ultravioleta.
- ▶ Por debajo de los 450 °C un cuerpo emite tan poca luz visible que no es captada por el ojo humano, y aparece de color negro.
- ▶ Tanto la curva de emisión de radiación en función de la frecuencia (**curva espectral**), como la potencia emitida dependen de la temperatura del cuerpo emisor.
- ▶ Ya desde finales del siglo XIX el físico austríaco Stephan J. Stefan había observado que la intensidad de radiación emitida por un cuerpo a temperatura T verificaba

$$I \leq \sigma T^4$$

donde σ es una constante igual a $5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

- ▶ Esta fórmula fue redescubierta 5 años más tarde por Boltzmann, y ahora es conocida por la ley de Stefan-Boltzman.



Equilibrio termodinámico

- ▶ Si el cuerpo está en equilibrio termodinámico con el entorno, entonces la potencia radiada ha de ser igual que la absorbida.
- ▶ Con argumentos termodinámicos Kirchoff demostró que esto ha de ser cierto para cada frecuencia de radiación emitida. Por lo tanto un cuerpo que absorba toda la radiación incidente sobre él (máxima absorción), ha de emitir la misma cantidad, siendo en este caso la intensidad de emisión máxima, es decir, σT^4 .
- ▶ Dicho cuerpo recibe el nombre de **cuerpo negro**.
- ▶ Una forma sencilla de fabricar un cuerpo negro es una cavidad con una pequeña abertura, que actuará como un cuerpo negro al absorber toda la radiación que incida sobre ella.



- ▶ Utilizando argumentos termodinámicos, Wien demostró que la distribución de la radiación emitida en función de la frecuencia tiene un máximo que se desplaza linealmente con la temperatura, en concreto demostró que

$$\lambda_{\max} = 0,0028978/T$$

- ▶ Por ejemplo, para $T = 5800K$ la longitud de onda de máxima emisión es

$$\lambda_{\max} = 0,0028978/5800 = 500nm$$

que corresponde al color verde del espectro visible.



Radiación de fondo

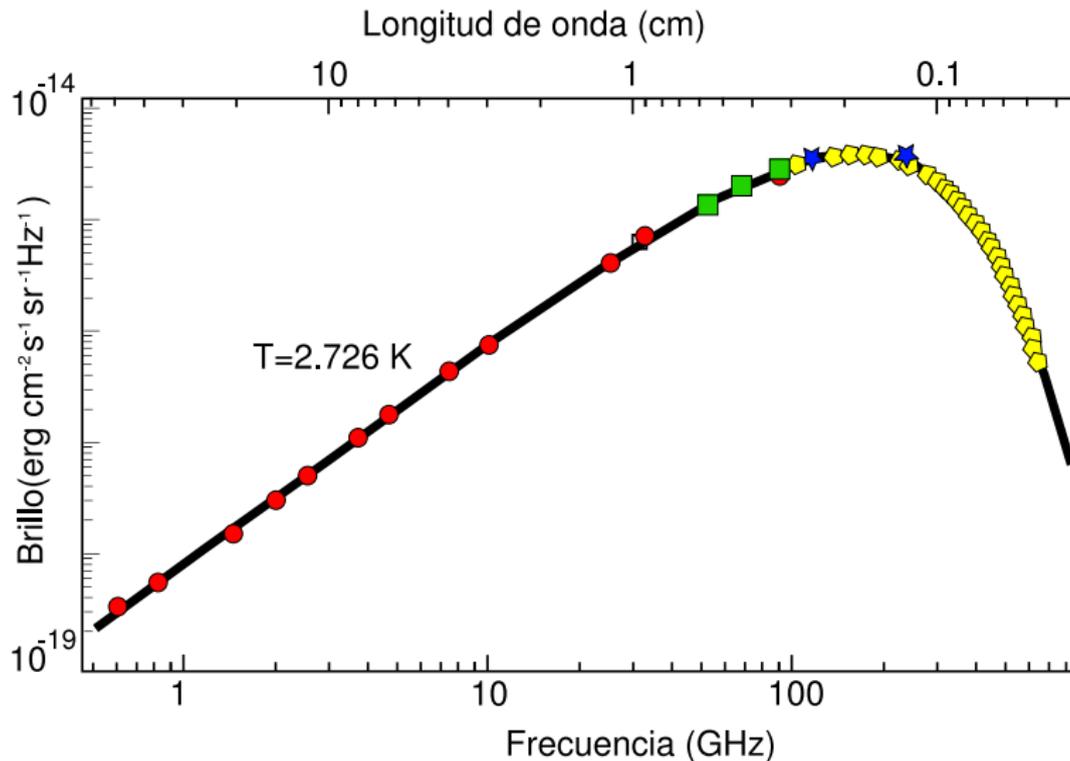


Figura: Curva espectral de la radiación de fondo del Universo. Los datos son de distintos detectores tanto en la atmósfera como en el espacio



Radiación solar sobre la atmósfera terrestre

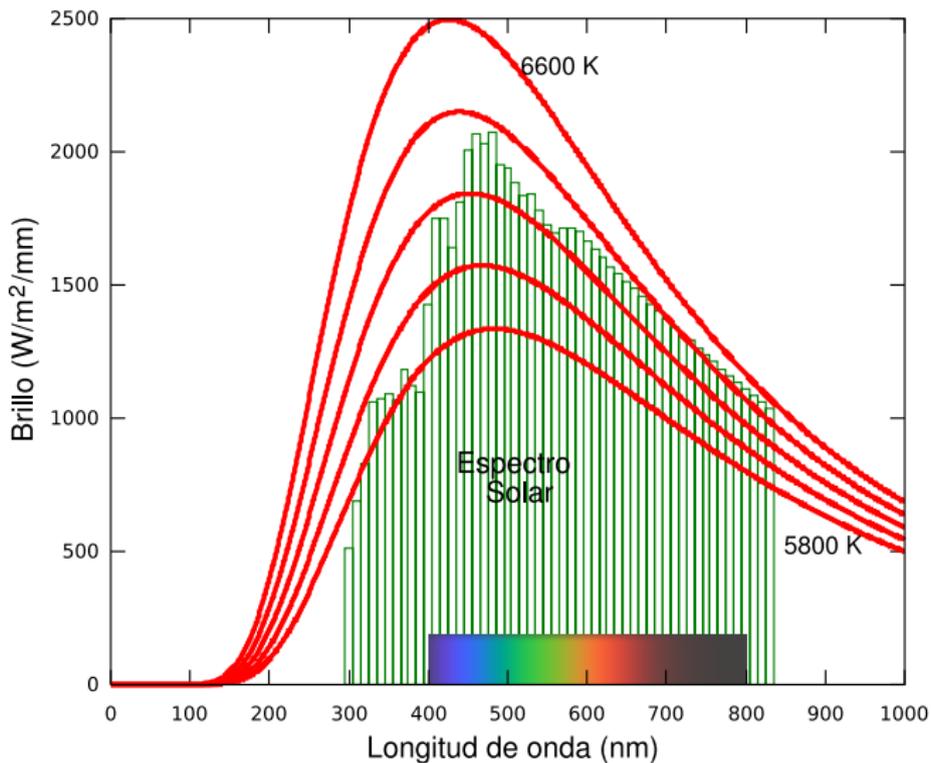


Figura: Comparación de distintas curvas espectrales del cuerpo negro para varias temperaturas



Campo eléctrico en una cavidad

- ▶ Para deducir estas propiedades del cuerpo negro, tenemos que determinar cuántas ondas estacionarias (modos) por unidad de volumen pueden situarse en la cavidad, así como su energía.
- ▶ El número de ondas electromagnéticas estacionarias, con campo eléctrico nulo en las paredes, puede determinarse de la solución armónica simple.
- ▶ Una onda estacionaria confinada entre dos paredes separadas por una distancia L , se representa por $\sin 2\pi x/\lambda \sin \omega t$, que satisface las condiciones de pared en $x = 0$ y $x = L$ si $2\pi L/\lambda = n\pi$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Esto da lugar a la relación entre el número de modo n y su frecuencia

$$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2\nu L}{c}$$



Modos en una cavidad

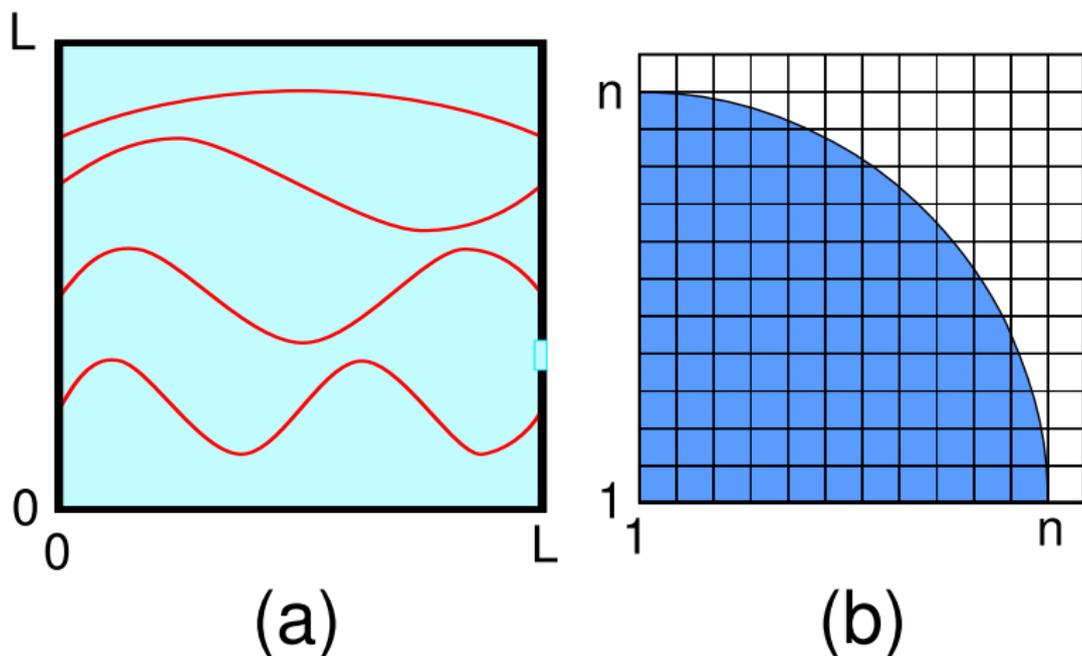


Figura: (a) Algunos modos electromagnéticos en una caja bidimensional, (b) El número de modos encerrados en el cuarto de círculo de radio n es aproximadamente su área ($\pi n^2/4$) dividida por el área de un i cuadrado, que es la unidad, y multiplicado por el número de modos posibles en cada cuadrado, que es 2 por los estados de polarización posibles.



Densidad de modos

- ▶ En 1D el número total de modos en la cavidad con frecuencia menor que ν sería multiplicar n por el número de direcciones independientes de polarización, es decir, por 2.
- ▶ En 2D tenemos $E = \text{sen } n_x \pi / Lx \text{ sen } n_y \pi / Ly \text{ sen } \omega t$, con $n_x^2 + n_y^2 = 4L^2 / \lambda^2$, con en número total de modos sería

$$N = 2 \times \frac{1}{4} \times \pi n^2 = \frac{2\pi\nu^2 L^2}{c^2}$$

- ▶ En 3D sería de forma análoga

$$N = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{8\pi\nu^3 L^3}{3c^3}$$



El campo eléctrico \mathbf{E} verifica la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Una solución prototipo es $E = \sin k_x x \sin k_y y \sin \omega t$, que sustituida en la ecuación anterior da

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2$$

llamando $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi\nu$, tenemos la relación de dispersión $\lambda = 2\pi c/\omega$. Para el caso de un cubo de lado L con campo nulo en las paredes, la ecuación anterior dará como condición $k_x L = n_x \pi$ y $k_y L = n_y \pi$. Con estos valores en la relación de dispersión tenemos

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2}$$



Densidad de energía

- ▶ Por lo tanto, recolectando lo anterior, el número de modos por unidad de frecuencia y de volumen ($V = L^3$) en 3D es

$$\frac{dN}{dV d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

- ▶ Esto es precisamente la **densidad de modos** por unidad de frecuencia.
- ▶ La **densidad de energía** por unidad de frecuencia en la cavidad será el producto de $\frac{dN}{dV d\nu}$ por la energía media ϵ_ν de cada modo de frecuencia ν .
- ▶ Hasta aquí la mecánica clásica y la cuántica coinciden.



Densidad de energía clásica

- ▶ Clásicamente cada modo puede tomar una energía arbitraria e independiente de su frecuencia, con una probabilidad

$$P(\epsilon) = \frac{e^{-\epsilon/kT}}{\int_0^{\infty} e^{-x/kT} dx}$$

- ▶ Por lo tanto la energía media de cada modo es la misma e igual a

$$\epsilon_{\nu} = \int_0^{\infty} \epsilon P(\epsilon) d\epsilon = kT$$

- ▶ De esta forma la densidad de energía será

$$u(\nu) = \frac{dN}{dV d\nu} \epsilon_{\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

- ▶ Esta densidad no está acotada para altas frecuencias, lo que daría una densidad de energía total en la cavidad infinita. Este comportamiento a alta frecuencia se denomina castástrofe ultravioleta, y suspuso un escollo insalvable dentro de la física clásica.



- ▶ A finales del siglo XIX The Imperial Institute of Physics and Technology estaba midiendo las propiedades luminosas de metales incandescentes a fin de obtener un estándar aceptable para las nuevas lámparas incandescentes. Los resultados estaban en discrepancia con la teoría clásica.
- ▶ En 1900 Planck, que estaba en contacto con los que realizaban estas medidas, construyó otra densidad de energía basándose en la hipótesis de que los modos sólo podían tener energías discretas, múltiplos de una constante a_ν .
- ▶ Según esto tenemos una energía media de cada modo

$$\epsilon_\nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n a_\nu e^{-n a_\nu / kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n a_\nu / kT}} = \frac{a_\nu}{e^{a_\nu / kT} - 1}$$

- ▶ Para satisfacer la ley de Wien se ha de verificar que $a_\nu = h\nu$ con h la llamada **constante de Planck**.



Potencia emitida

- ▶ La densidad de energía por unidad de frecuencia es

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

- ▶ La densidad de energía total es finita e igual a

$$U = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2} T^4 = aT^4$$

- ▶ La potencia emitida por unidad de área y frecuencia es $c/4$ de $u(\nu)$. Esto hace que

$$aT^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

- ▶ Esto permite determinar σ desde la teoría cuántica $\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2}$.
- ▶ La distribución espectral concentra el 75 % de la energía aT^4 en las longitudes de onda superiores a λ_{\max} .
- ▶ La hipótesis de los cuantos tuvo un alcance muy superior al ideado originalmente por Planck.
- ▶ Por ejemplo, Einstein aplicaría una idea semejante para explicar, también con bastante acuerdo experimental, el efecto fotoeléctrico.



Función de Planck

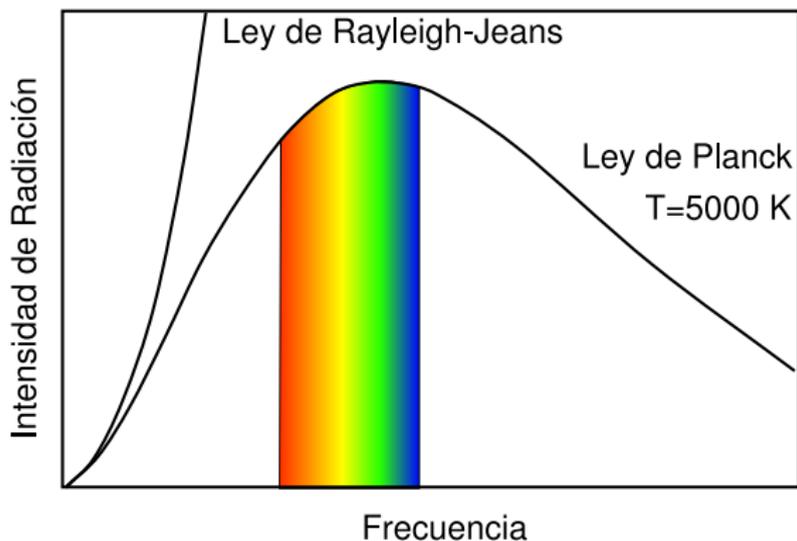


Figura: La función de Planck, donde se ha señalado la región aproximada del espectro visible



La energía por unidad de tiempo, superficie, frecuencia y unidad de ángulo sólido B_ν , se relaciona con la densidad espectral u_ν por

$$B_\nu 4\pi \delta t A = u_\nu c \delta t A$$

que expresa el balance de energía en un cilindro de área A y longitud $c\delta t$ en cada dirección. La intensidad I_ν ($\text{W}/\text{cm}^2/\text{Hz}$) de radiación emitida al vacío isotrópicamente sería

$$I_\nu = \int_{\text{semiesfera}} d\Omega B_\nu \cos \theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \frac{c}{4\pi} u_\nu \sin \theta \cos \theta = \frac{c}{4} u_\nu$$

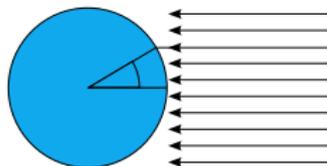
Integrando en frecuencia se obtiene la relación de $c/4$ entre intensidad $I = \sigma T^4 = c/4u$ con la densidad de energía $u = aT^4$, relacionando las dos constantes de radiación

$$a = 4\sigma/c$$



Temperatura de la Tierra (¿Marte?)

La distancia media entre la Tierra y el Sol se estima en $d = 1,49 \times 10^{11}$ m, y el radio del sol es $R_{\text{Sol}} = 6,95 \times 10^8$ m. Suponiendo que tanto la Tierra como el Sol son cuerpos negros, y que la intensidad de radiación solar que llega a la Tierra es de 1353 W/m^2 , determinar la temperatura superficial del sol y de la Tierra.



El balance de energía entre el Sol y la Tierra, situados a una distancia d , es

$$\sigma T_{\text{Sol}}^4 4\pi R_{\text{Sol}}^2 = I_{\text{Tierra}} 4\pi d^2$$

de donde obtenemos $T_{\text{Sol}} = 5755 \text{ K}$. Esta radiación llega a la superficie de la Tierra, que dependiendo de la latitud recibe más o menos irradiación solar. En concreto

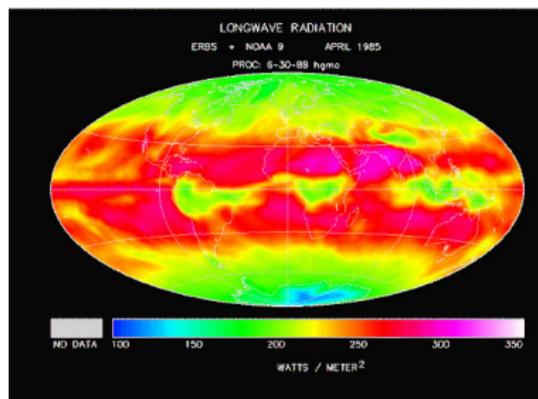
$$\sigma 4\pi R_{\text{Tierra}}^2 T_{\text{Tierra}}^4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\text{Tierra}} \cos \theta R_{\text{Tierra}} d\phi R_{\text{Tierra}} \sin \theta d\theta$$

que da $T_{\text{Tierra}} = 278 \text{ K}$.



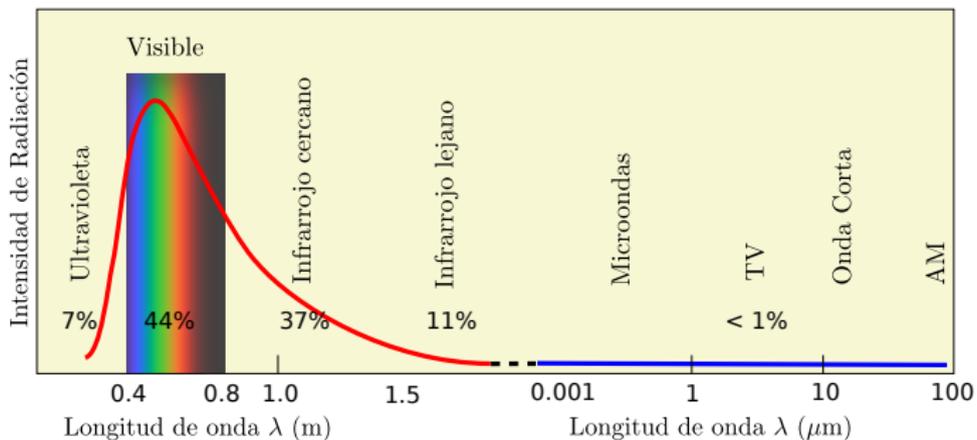
Emisión de larga longitud de onda por la tierra

La Tierra está lejos de ser un emisor uniforme espacialmente y tipo Cuerpo Negro espectralmente.



Emisión de larga longitud de onda por el Sol

La radiación solar que llega a la Tierra es en su mayor parte visible e infrarroja cercana.



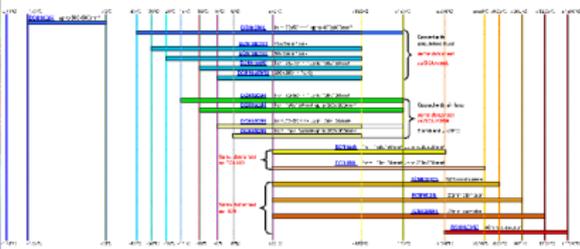
Cuerpos negros para calibrar

Hoy en día los dispositivos de cuerpos negros se utilizan para calibrar radiación infraroja, tanto de cámaras como de detectores (scanners, pirómetros, etc)



HGH **BLACKBODY SELECTION**
According to TEMPERATURE RANGE and EMITTING SURFACE DIMENSIONS

Click below on the name of selected product to reach its web page and datasheet
(click then on "allow" if necessary)



HGH SYSTEMES INFRAROUGES

30000 rue de la Vallée, 13100 Saint-Jean-Pied-de-Port
Tél. +33 (0)5 49 00 00 00 Fax. +33 (0)5 49 00 00 00
www.hghgroup.fr / www.hgh.com



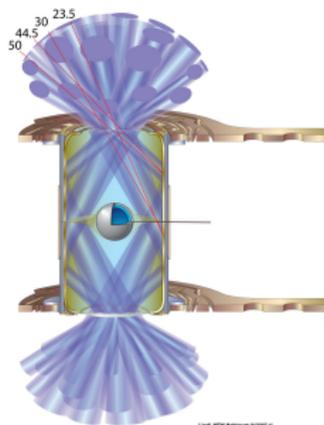
Volcán Kilauea (wikipedia y otros)

La temperatura la lava tipo Pahoehoe en el volcán Kilauea (Hawaii) puede estimarse del color de la lava, entre 1000 a 1200°C



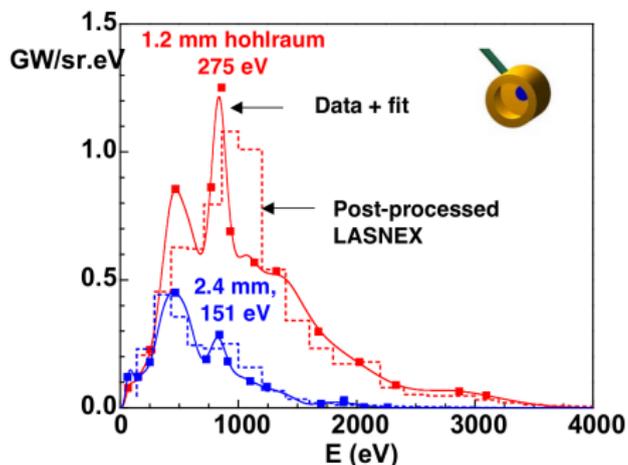
Blancos Hohraum para fusión nuclear

Un cilindro de U+AU compone las paredes de una cavidad tipo cuerpo negro. Haces láser de MJ de energía inciden en su interior generando una radiación de temperatura equivalente de unos 300eV



Espectro de Rayos X

La emisión de rayos X desde las paredes del cilindro se ajusta razonablemente bien por una distribución planckiana.



Metabolismo humano y emisión infrarroja

Un ser humano tiene un pico de emisión de radiación en unos $10\mu m$. Para estimar este valor basta con considerar de energía debido a la radiación

$$\text{Potencia radiada} = P = A\sigma\epsilon(T^4 - T_o^4)$$

donde T_o es la temperatura ambiente, A el área del cuerpo, ϵ la emisividad en el infrarrojo. Tomando $A = 2m^2$, $\epsilon = 1$ (común a la mayoría de los cuerpos en el infrarrojo, $T=28\text{ }^\circ\text{C}$ con ropa, $T=33\text{ }^\circ\text{C}$ en superficie de piel, da una potencia perdida de $100W$, es decir, una energía de 9 MJ , o de 1700 kcal/día . La longitud de onda característica de emisión será $\lambda = \frac{0,002898mK \times 10^9nm/m}{306} = 9500nm$ que es el centro de frecuencias donde se diseñan las cámaras para visión infrarroja.



Figura: Ficha policial en un mundo infrarrojo. Observar la escala de temperaturas centrada en $33\text{ }^\circ\text{C}$

